ANALISISI BASIS METODEDEKOMPOSISINILAI SINGULAR DALAM MENENTUKAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Darwin Thamrin

Program Studi Matematika Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Cenderawasih
email: darwinthamrin@gmail.com

Abstrak. Dalam Penelitian ini dibahas solusi sistem persamaan linear dengan analisis dekomposisi nilai singular yaitu salah satu metode penguraian sebuah matriks ke dalam tiga buah matriks. Proses menentukan solusi sistem persamaan linear menggunakan metode analisis dekomposisi nilai singular dimulai dengan mengubah sistem persamaan linear ke dalam bentuk $AX = B$, kemudian matrikskoefisien A dari system persamaan linear tersebut diuraikanmenggunakanlangkah-langkahpenyelesaian dekomposisi nilai singular, sehingga diperoleh$A = USV^T$. Dari hasil penguraian matriks Adiperoleh basis-basis ortonormal untuk $R(A)$ yaitu $\{u_1 u_2, \dots, u_r\}$, dengan r banyaknya rank dari matriks A. Selanjutnyaditentukan nilai proyeksi$R(A)$ terhadap $B(proy_{R(A)}B)$ dengan persamaan $proy_{R(A)}B = \sum_{k=1}^{r} < B, u_k > u_k$. Dari hasil proyeksi tersebut akan dihasilkan dua kemungkinan yaitu $proy_{R(A)}B = B$ dan $proy_{R(A)}B \neq B$. Apabila sistem persamaan linear $proy_{R(A)}B = B$ maka sistem persaman linear tersebut mempunyai solusi. Solusi dari sistem persamaan linear tersebut dapat diselesaikan menggunakan persamaan $x = \sum_{k=1}^{r} \frac{<B,u_k>}{\sigma_k} v_k$ untuk $N(A) = \mathbf{0}$, dan menggunakan persamaan $x = \sum_{k=1}^{r} \frac{<B,u_k>}{\sigma_k} v_k + \sum_{k=r+1}^{n} \mu_k v_k$ untuk $N(A) \neq \mathbf{0}$. Namun apabila sistem persamaan linear dengan$proy_{R(A)}B \neq B$ maka sistem tersebut tidak mempunyai solusi, tetapi sistem persamaan linear dapat ditentukan solusi pendekatan terbaik dengan menggunakan persamaan $x = \sum_{k=1}^{r} \frac{<B,u_k>}{\sigma_k} v_k$.Dengan menggunakan analisis dekomposisi nilai singular, solusi dari persamaan selalu dapat diselesaikan meskipun matriks koefisien yang terbentuk bukanlah matriks bujursangkar atau matriks bujursangkar yang tidak mempunyai invers.

Kata kunci: *Dekomposisi Nilai Singular, Basis Ortonormal, Matriks , Nilai Eigen Vektor Eigen*

1. PENDAHULUAN

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan m persamaan linear dan n peubah dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah peubah sedangkan a_{ij} dan b_i konstanta dengan $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$.
Sistem persamaan linear di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$AX = B$$

dengan, X adalah matriks peubah sedangkan A merupakan matriks koefisien, dan B merupakan matriks konstanta.
Beberapa metode yang telah dipelajari untuk solusi sistem persamaan linear diantaranya eliminasi Gauss, eliminasi Gauss Jordan, aturan Cramer, invers matriks koefisien. Namun metode-metode tersebut mempunyai kekurangan. Khususnya, aturan Cramer dan invers matriks koefisien yaitu apabila matriks yang terbentuk bukanlah matriks persegi atau matriks yang nilai

determinannya sama dengan 0, maka invers dari matriks tidak dapat ditentukan, sehingga solusi dari sistem persamaan linear tidak dapat diselesaikan. Untuk mengatasi kekurangan dari metode-metode tersebut, dapat digunakan salah satu metode yaitu analisis dekomposisi nilai singular.

2. LANDASAN TEORI

1.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x pada $\mathbb{R}^n$ disebut suatu vektor eigen dari A jika Ax adalah suatu penggandaan scalar$Ax = \lambda x$untuk suatu skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah martiks $A_{n\times n}$ dituliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda I x$$

atau secara equivalen

$$(\lambda I - A)x = \mathbf{0}$$

Persamaan ini memiliki solusi tak-nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karasteristik matriks A ; skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen. Apabila diperluas lagi, $det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karateristik matriks A.

Setelah menentukan nilai eigen, akan ditentukan vektor eigennya. Vektor-vektor eigen matriks A yang terkait dengan sebuah nilai eigen λ adalah vektor-vektor taknol $\boldsymbol{x}$ yang memenuhi persamaan $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Dengan kata lain, vektor-vektor eigen yang terkait dengan λ adalah vektor-vektor taknol di dalam ruang solusi $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0$. Ruang solusi ini disebut ruang eigen dari matriks A yang terkait dengan λ.

1.2 Ortogonal, ortonormal, Ruang Baris, Ruang Kolom dan Ruang Null

Definisi

Dua vektor $\boldsymbol{u}$dan $\boldsymbol{v}$ didalam sebuah ruang hasilkali dalam dikatakan ortogonal jika $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= 0$

Definisi

Himpunan vektor dalam ruang hasilkali dalam disebut himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. himpunan ortogonal dengan setiap vektor mempunyai norma 1 disebut ortonormal.

1.2 Ruang Null

Definisi

Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka subruang dari $\mathbb{R}^n$ yang terentang oleh vektor-vektor baris dari A disebut ruang baris dari A, dan subruang dari $\mathbb{R}^m$ yang terentang oleh vektor-vektor kolom disebut ruang kolom dari A. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan homogen $AX = 0$, yang merupakan suatu subruang dari $\mathbb{R}^n$, disebut ruang null dari A.

Definisi

Dekomposisi nilai singular merupakan metode penguraian sebuah matriks ke dalam tiga buah matriks. Asumsikan bahwa A adalah matriks $m \times n$ dimana $m \geq n$ (namun asumsi ini juga berlaku untuk $m < n$). Dengan rank $(A) = r$ dan $r \leq \min(m, n)$, maka matriks A dapat difaktorkan kedalam bentuk.

$$A = USV^T$$

dimana:

$U = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m]$ adalah matriks ortogonal berukuran $m \times m$

$V = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$ adalah matriks ortogonal berukuran $n \times n$

$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks yang berukuran $m \times n$, dengan $\sum$ adalah matriks berukuran $r \times r$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Langkah-Langkah penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode analisis dekmposisi nilai singular

1. Sistem persamaan linear ditulis dalam bentuk matriks $AX = B$ dengan $A_{m\times n}, X_{n\times 1}$ dan $B_{m\times 1}$
2. Matriks$A_{m\times n}$ dari sistem persamaan linear tersebut difaktorkan menjadi tiga buah matriks yaitu $U, S,$ dan V menggunakan langkah-langkah dekomposisi nilai singular, dengan cara sebagai berikut:
   a. Menghitung matriks $A^T A$
   b. Menghitung nilai eigen dari $A^T A$
   c. Menghitung vektor eigen dari matriks $A^T A$
   d. Membentuk matriks $V = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$ dengan menormalisasikan vektor-vektor basis ruang eigen $A^T A$
   e. Membentuk matriks diagonal dari nilai-nilai singular matriks A. Nilai-nilai singular ditentukan oleh rumus $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Matriks tersebut adalah matriks singular (S) yang S berbentuk
   $S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}$ dan $\sigma_i = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ adalah akar dari nilai eigen positif $A^T A$
   f. Menentukan matriks $U = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$ yang dibentuk dari rumus $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ dengan $i = 1,2,\ldots,m$
   Namun jika $\sigma_i = 0$, maka persamaan $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ tidak dapat digunakan. Karena matriks U adalah matriks ortogonal maka vektor u_i dengan $\sigma_i = 0$, harus saling ortonormal dengan vektor u_i dengan $\sigma_i > 0$ lainnya atau norma dari setiap baris pada matriks U adalah 1
   g. Menghitung rank dari A
   Jika A mempunyai rank sebanyak$r$, dengan $0 < r \leq \min(m, n)$ dan $r \in \mathbb{Z}$, maka $\{u_1, \ldots, u_r\}$ membentuk basis ortonormal untuk $R(A)$
3. Menentukan nilai $proy_{R(A)}B$ dengan menggunakan persamaan

$$proy_{R(A)}B = \sum_{k=1}^{r} < B, u_k > u_k$$

Berdasarkan pengujian di atas akan diperoleh dua kemungkinan, yaitu:

a. Untuk $proy_{R(A)}B = B$, maka pada kasus ini sistem persamaan linear mempunyai solusi. Solusi dari sistem persamaan tergantung pada ruang null dari matriks A $\big(N(A)\big)$,

Pertama, Jika $N(A) = \mathbf{0},$ maka sistem persamaan linear mempunyai satu solusi (solusi tunggal) yang solusinya diberikan oleh persamaan

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{< B, u_k >}{\sigma_k} v_k$$

Kedua Jika $N(A) \neq \mathbf{0}$maka sistem persamaan linear mempunyai tak terhingga solusi dan solusinya diberikan oleh

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{< B, u_k >}{\sigma_k} v_k + \sum_{k=r+1}^{n} \mu_k v_k$$

b. Untuk $proy_{R(A)}B \neq B$, maka pada kasus ini sistem tidak mempunyai solusi, namun dapat dihitung pendekatan terbaik dari solusinya. Solusi pendekatan terbaik diberikan oleh persamaan

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{< B, u_k >}{\sigma_k} v_k$$

3.2 Contoh Kasus

Berikut ini penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua persamaan dan dua variabel

$$x_1 + x_2 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 = 6$$

Penyelesaian:

1. Sistem persamaan linear ditulis dalam bentuk $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Matriks$A$ dari sistem persamaan linear tersebut difaktorkan menjadi tiga buah matriks yaitu U, S, dan V menggunakan langkah-langkah dekomposisi nilai singular

a. Menghitung matriks $A^T A$

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

b. Menghitung nilai eigen dari $A^T A$

diperoleh nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 10$, dan $\lambda_2 = 0$

c. Menghitung vektor eigen dari matriks $A^T A$

vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 10$ adalah$x = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sehingga basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda_1 = 10$ adalah vektor tak nol yaitu $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda_2 = 0$ adalah vektor tak nol $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

d. Menyusun matriks $V = [v_1 \quad v_2]$ dengan menormalisasikan vektor-vektor basis ruang eigen $A^T A$ diperoleh,

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Sehingga, diperoleh matriks $V = [v_1 v_2]$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e. Menentukan matriks diagonal dari nilai-nilai singular matriks A. Nilai-nilai singular ditentukan oleh rumus $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ dengan $i = 1$. Matriks tersebut adalah matriks singular (S). Matriks S berbentuk $S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $\Sigma = [\sigma_i]$dan σ_i adalah akar dari nilai eigen dari $A^T A$

Jadi

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f. Menentukan matriks $U = [u_1 \quad u_2]$ yang dibentuk dari rumus $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ dengan $i = 1,2$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Karena matriks U harus berukuran 2×2, maka kolom kedua yaitu (u_2) dari matriks U ditentukan dengan mencari satu kolom yang saling ortonormal dengan kolom lainnya, diperoleh

$$u_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks $U = [u_1 \quad u_2]$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

g. Menentukan rank dari matriks A

rank $(A) = 1$

karena rank $(A) = 1$maka dapat ditentukan basis-basis ortonormal untuk $R(A)$ yaitu$\{u_1\} = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\right\}$

3. Menentukan nilai $proy_{R(A)}B$

$$proy_{R(A)}B = \sum_{k=1}^{r} < B, u_k > u_k$$
$$= \sum_{k=1}^{1} < B, u_k > u_k$$
$$= \begin{bmatrix} 3{,}20 \\ 6{,}40 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan diperoleh nilai $proy_{R(A)}B \neq B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

Karena nilai $proy_{R(A)}B \neq B$ berarti hal ini menandakan sistem persamaan linear ini tidak mempunyai solusi, akan tetapi solusi pendekatan terbaik dapat dicari yaitu:

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{< B, u_k >}{\sigma_k} v_k = \sum_{k=1}^{1} \frac{< B, u_k >}{\sigma_k} v_k$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16}{10} \\ \frac{16}{10} \end{bmatrix}$$

maka diperoleh $x_1 = \frac{16}{10}$, dan $x_2 = \frac{16}{10}$

4. KESIMPULAN

Metode analisis dekomposisi nilai singular memiliki kelebihan dari metode-metode yang telah dipelajari untuk mencari solusi sistem persamaan linear, seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss Jordan, aturan Cramer, invers matriks koefisien. Dengan menggunakan analisis dekomposisi nilai singular, solusi dari persamaan selalu dapat diselesaikan meskipun matriks koefisien yang terbentuk bukanlah matriks persegi atau matriks persegi yang tidak mempunyai invers. Kelebihan lain dari metode ini adalah solusi dari sistem persamaan linear tetap dapat diselesaikan meskipun sistem persamaan linear tersebut tidak mempunyai penyelesaian, dalam hal ini solusi yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton,H. 2009. *Dasar-Dasar Aljabar Linear (Jilid I)*. Tangerang: Binarupa Aksara.

[2] Anton,Howard. 2009. *Dasar-Dasar Aljabar Linear (Jilid 2)*. Tangerang: Binarupa Aksara.

[3] Anton,H. 1991. *Aljabar Linear Elementer (edisi kelima)*. Terjemahan oleh Pantur Silaban, Ph. D dan Drs. I. Nyoman Susila, M.Sc. Jakarta Erlangga

[4] Anton, H dan C. Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi (Edisi Kedelapan)*. Terjemahan oleh Refina Indasari dan Irzam Harmen, Jakarta: Erlangga

[5] Irmawati, I., M 2011. Solusi Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular. Skripsi. Fakultas MIPA Unuversitas Cenderawasih, Jayapura.

[6] James M. G. dan William W. Jr. 1987. *Aljabar Martiks Untuk Para Insinyur (edisi kedua)*. Jakarta: Erlangga.

[7] Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya (edisi ke lima)*. Jakarta: Erlangga.

[8] Purcell, E. J. dkk. 2004. *Kalkulus Jilid 1 (Edisi Kedelapan).* Jakarta: Erlangga